Vorwissen Theorie-Praktikum

Die folgenden Fragen und Aufgaben dienen zur Selbsteinschätzung zur Teilnahme am Theorie-Praktikum. Die Veranstaltung richtet sich an solche Studierende ab dem 3. Jahr Bachelor Physik, die Freude an der Mathematik und Theorie haben, und die den Stoff der Mathematischen und Theoretischen Grundvorlesungen sicher beherrschen.

Damit Sie eine Vorstellung davon bekommen, was wir von Ihnen erwarten, finden Sie unten Aufgaben.

Wenn Ihnen diese Aufgaben leicht fallen: Prima, dann sind Sie im Theoretischen Praktikum genau richtig.

Wenn Sie aber bei mehreren Aufgaben Schwierigkeiten haben, werden Sie im Theoretischen Praktikum nicht glücklich werden — in dem Fall raten wir von einer Teilnahme ab. Probieren Sie es aus und seien Sie ehrlich zu sich selbst, damit das Praktikum für Sie und die Lehrenden zu einer gelungenen Veranstaltung werden kann.

Vorwissen Mathematik

Vorausgesetzt werden die Inhalte von Lineare Algebra, Analysis 1/2 und den Mathematischen Methoden 1 und 2.

1. Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Gib eine Matrix A an, die mittels $x \mapsto Ax$ diese Operation als lineare Abbildung beschreibt.

   (b) Welche Eigenwerte und Eigenvektoren besitzt diese Abbildung?

   (c) Bestimme die Determinante $\det A$.

   (d) Bestimme die Spur $\operatorname{tr} A$.

2. Im $\mathbb{R}^3$ sei $||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ die übliche Norm.

   (a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, dann definiert $F : x \mapsto f(r)$ mit $r = \sqrt{||x||}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Drücke $\frac{\partial}{\partial x_i} F$ durch die Ableitung von f aus.

   (b) Drücke $\Delta F = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F$ durch Ableitungen von f aus.

3. Bestimme die Lösung folgender gewöhnlicher Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = 1$$

   mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$.

4. Bestimme folgende Integrale, die die Delta-Distribution enthalten:
   (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ \cos x\, e^{-x^2}\, dx$
   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\ \sin x\, e^{-x^2}\, dx$

5. Die Fouriertransformierte $\hat{f}$ zu einer (geeigneten) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch
$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\, f(x)\, dx\ .$$
   (a) Bestimme $\hat{f}$ für die durch $f(x) = x\,\theta(1 - |x|)$ definierte Funktion.(Hierbei ist θ die Heaviside-Theta-Funktion: $\theta(x) = 1$ für $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ für $x < 0$.)
   (b) Skizziere f und $\hat{f}$.

6. Bestimme das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4}\, dx$$
mithilfe des Residuensatzes.

Physikalische Grundlagen

Vorausgesetzt werden die Inhalte von T1 (Mechanik) und T2 (Quantenmechanik). Kenntnisse von T3 (Elektrodynamik) sind hilfreich!

1. Gegeben sei die Lagrangefunktion eines Teilchens in zwei Dimensionen mit Koordinaten x und y durch
$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + x\,\dot{y}\ .$$
   (a) Bestimme die zu x und y kanonisch konjugierten Impulse $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$, $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}$.
   (b) Bestimme die Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen).
   (c) Gib die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen an und interpretiere die Bewegung.
   (d) Bestimme die Hamiltonfunktion $H(x, y, p_x, p_y)$.

2. Gegeben sei ein Teilchen im dreidimensionalen Euklidischen Raum, dessen Position wir durch einen Vektor $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ beschreiben. Es bewegt sich in einem Potential, dass nur von der x_1-Komponente abhängt mit Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} - V(x_1) \ .$$

   (a) Welche Komponente(n) des Impulses $\vec{p}$ ist(sind) erhalten und warum?

   (b) Welche Komponente(n) des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ ist(sind) erhalten und warum?

   (c) Welche weitere Erhaltungsgröße gibt es?

3. Gegeben sei ein eindimensionales quantenmechanisches Teilchen, das durch eine Wellenfunktion

$$\psi(x) = c\, e^{-a\,(x-x_0)^2}$$

beschrieben wird ($a, c, x_0 \in \mathbb{R}$ und $a, c > 0$).

   (a) Skizziere die Wellenfunktion.

   (b) Bestimme die korrekte Normierung c so, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$.

   (c) Bestimme den Erwartungswert des Ortsoperators X.

   (d) Für welche Werte von a und x_0 ist ψ Eigenfunktion des Hamiltonoperators

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 - \rho\, x$$

   (wobei $m, \omega, \rho \in \mathbb{R}$ und $\omega, m > 0$), und was ist der Eigenwert?

4. Auf einem geeigneten Unterraum $D \subset L_2(\mathbb{R}^3)$ des Raums der quadratintegrablen Wellenfunktionen seien Orts- und Impulsoperatoren durch

$$(X_k \psi)(x) = x_k\, \psi(x) \qquad , \qquad (P_k \psi)(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(x)$$

definiert (wobei D so gewählt ist, dass $X_k(D) \subset D$ und $P_k(D) \subset D$).

   (a) Bestimme die Kommutatoren $[X_i, X_j]$, $[P_i, P_j]$ und $[X_i, P_j]$.

   (b) Bestimme den Kommutator $\left[X_i, \sum_{j=1}^{3} P_j P_j\right]$.

   (c) Seien $L_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, X_j\, P_k$ die Komponenten des Drehimpulsoperators. Bestimme $[L_i, X_\ell]$.